Il calcolo a scuola nell'era dell'elettronica

Gianfranco Arrigo, SUPSI-DFA Locarno, NRD Bologna

Sommario

1. Introduzione

2. Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico e il tramonto dei procedimenti di calcolo in colonna

3. Progetto per l'insegnamento del calcolo a scuola

4. Calcolo mentale ragionato e calcolo "in riga"

5. Attività con i numeri:
    - i numeri come amici;
    - veri problemi, con più soluzioni, con calcoli ripetitivi,…
    - generalizzazioni, successioni e combinatoria

6. L'integrazione degli strumenti di calcolo elettronici

Dal Rapporto Éduscol, 2007 (Francia)

Tre aspetti basilari e altrettante concezioni da modificare:

- calcolo e ragionamento: calcolo cosciente (calcul réfléchi – halbschriftlisches Rechnen), il calcolo (e non solo la geometria) come scuola di ragionamento

- calcolo esatto e calcolo approssimato: due modi di calcolare ugualmente importanti

- calcolo mentale e strumento di calcolo: necessità di rafforzare le abilità del calcolo mentale (stima del risultato, ma non solo) e dell'uso degli strumenti elettronici di calcolo.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Prima rivoluzione: dall'abaco agli **algoritmi arabici** (calcolo in colonna)

XIII secolo, **Leonardo da Pisa** (Fibonacci) col suo **Liber abaci**; invasione arabica nella penisola iberica.

Situazione precedente: l'abaco (tavoletta con sassolini da muovere con le mani); per essere usato richiedeva un notevole apprendistato, perché, oltre alla mente, occorreva allenare la mano. I pochi abili a usarlo ne facevano una professione: l'abachista. Lavoravano con i mercanti, che normalmente non sapevano calcolare.

Prima rivoluzione: dall'abaco agli algoritmi arabici

La novità: un modo di calcolare per iscritto, che richiede solo un foglio, una matita e un apprendistato (relativamente) facile. Il calcolo diventa dominio di tutti: non è più necessario rivolgersi all'abachista.

Vettore del cambiamento: l'adozione del sistema di numerazione decimale, posizionale.
Un sistema del genere fu adottato già dai Sumeri e dai Babilonesi nel secondo millennio a.C., poi dai Cinesi poco prima della nostra era, dai Maya d'America attorno al IV secolo d.C. e infine gli Indiani d'Asia verso il V secolo. Gli Arabi lo presero dagli Indiani.

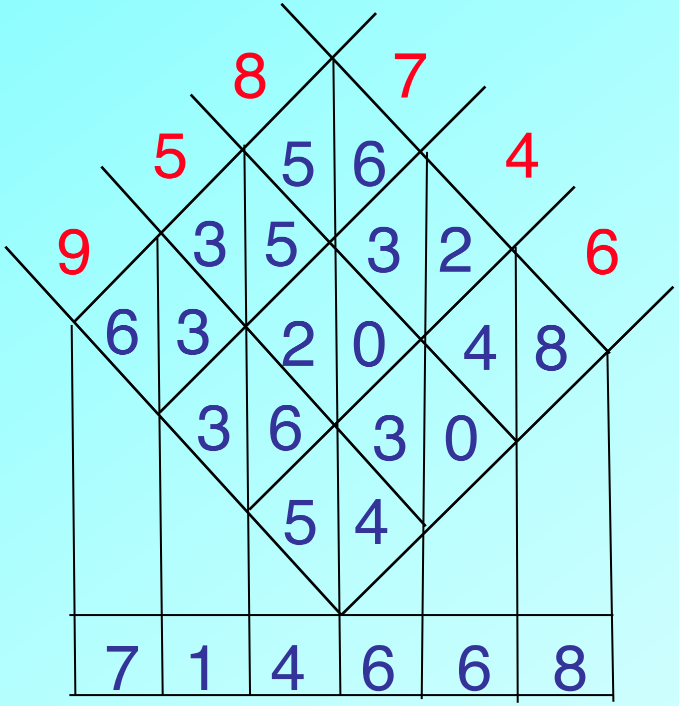
Dall'abaco agli algoritmi arabici

Come si svolse il cambiamento: molto lentamente; ci vollero circa due secoli prima che il nuovo modo di calcolare diventasse dominio pubblico e riconosciuto da tutti. Cause del ritardo: pregiudizi (anche religiosi), difesa corporativistica degli abacisti.

Effetto sulla matematica: la facilitazione del calcolo e soprattutto l'uso del sistema di numerazione decimale danno nuovo impulso alla ricerca matematica: dalle equazioni di primo e secondo grado si passa in fretta alla risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado (XVI e XVII secolo).

Metodo alternativo: moltiplicazione per gelosia (origini indiane)

Esempio: calcoliamo 958 x 746



958 x 746 = 714’668

Metodo alternativo: moltiplicazione egiziana

(Papiro di Ahmes, 1650 a.C.)

Esempio: calcoliamo 225 x 37

1	225	37
2	450	
4	900	
8	1800	
16	3600	
32	7200	
64	14400	
128	28800	
256	57600	
512	115200	
1024	230400	

Risultato:

225 + 900 + 7200 = 8325

Ma la matematica continuava ad essere raccontata…

Ecco la poesiola con la quale Tartaglia spiega a Cardano come si risolve un' equazione di terzo grado.

$$x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Quando che 'l cubo con le cose appresso

Se agguaglia à qualche numero discreto

$$\boxed{x = y - \frac{a}{3}}$$

Trovan dui altri differenti in esso.

$$y^3 + p\,y + q = 0$$

Da poi terrai questo per consueto

Ch 'l lor produtto sempre sia eguale

$$\boxed{y = z - \frac{p}{3\,z}}$$

Al terzo cubo delle cose neto

$$z^6 + q\,z^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

El residuo poi suo generale

$$\boxed{z^3 = t}$$

Delli loro lati cubi ben sottratti

$$t^2 + q\,t - \frac{p^3}{27} = 0$$

Varra la tua cosa principale.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Seconda rivoluzione: l'introduzione della **scrittura algebrica** (XVII secolo).

Precursore fu senz'altro Rafael Bombelli (attivo nel 1572) che, con la sua "algebra sincopata", preparò il terreno ai francesi François Viète (1540-1603) e René Descartes (1596-1650), italianizzato Cartesio.

Dopo l'introduzione della numerazione decimale posizionale, quella della scrittura algebrica è senz'altro il veicolo principale del grande sviluppo della matematica a partire dal XVII secolo.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Esempio di algebra sincopata (Raffaele Bombelli 1526-1572)

R • q • 31 via R • q • 13 : fa R • q • 403

Con François Viète (1540-1603), si giunge alla moderna scrittura matematica:

$$\sqrt{31} \cdot \sqrt{13} = \sqrt{403}$$

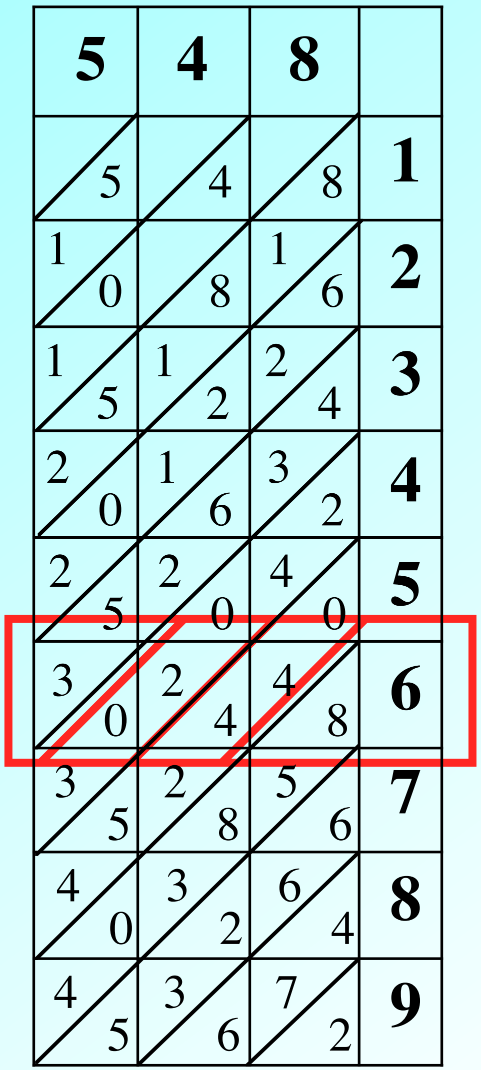
Dopo l'introduzione della numerazione decimale posizionale, quella della scrittura algebrica è senz'altro il veicolo principale del grande sviluppo della matematica a partire dal XVII secolo.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Terza rivoluzione: l'avvento delle calcolatrici meccaniche.

1617: John Napier presenta i bastoncini (o regoli) per calcolare: è l'inizio del calcolo meccanico.

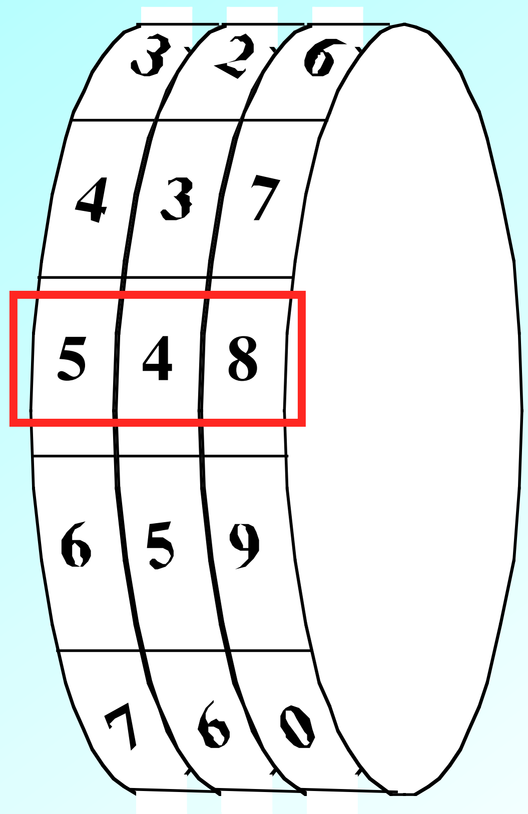
Esempio: per calcolare
548 · n (n=1,2,…9)
occorre scegliere i righelli del 5, del 4 e dell'8 e allinearli.
Per n=6, si legge il risultato addizionando i numeri nelle aree rosse: 548 · 6 = 3288



Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Terza rivoluzione: l'avvento delle calcolatrici meccaniche.

L'idea base è quella dei bastoncini di Napier, ma invece di mettere i numeri su bastoncini, si mettono su ruote.



In questo modo, con due sole ruote si possono comporre tutti i numeri di due cifre, con tre ruote quelli di tre cifre, ecc.

Con un sistema di ingranaggi si può fare in modo che, ai due numeri composti all'entrata, venga automaticamente associato il risultato di un'operazione aritmetica.

L’avvento delle calcolatrici meccaniche

La novità: si possono eseguire le quattro operazioni aritmetiche semplicemente battendo le dita su una tastiera.

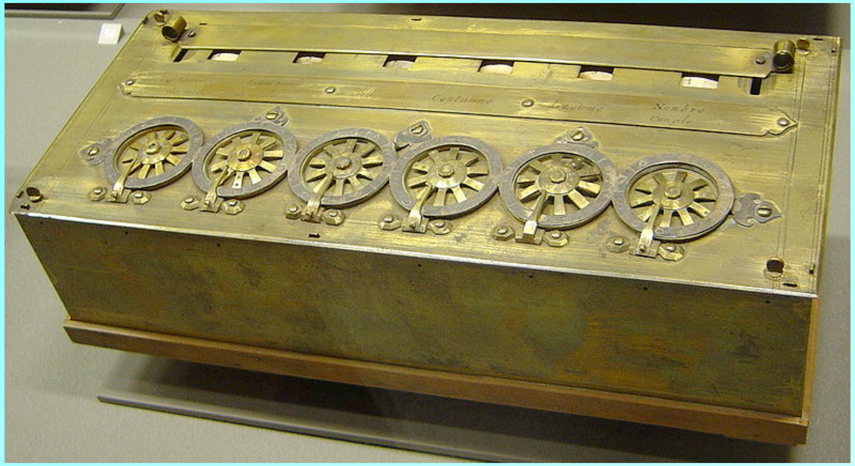
Vettore del cambiamento: il progresso dell’ingegneria meccanica e l’avvento dell’era industriale.

Come si svolse il cambiamento: le calcolatrici meccaniche si diffondono velocemente negli uffici, nelle banche, negli stabilimenti industriali e nel commercio in genere. Per calcoli scientifici si fa capo ancora ai logaritmi. Gli algoritmi arabici resistono ancora soprattutto nelle economie familiari, nel commercio al dettaglio e negli esercizi pubblici.

L’avvento delle calcolatrici meccaniche

L’evoluzione progressiva delle calcolatrici meccaniche:

1642: l’addizionatrice di Pascal, detta «pascalina».

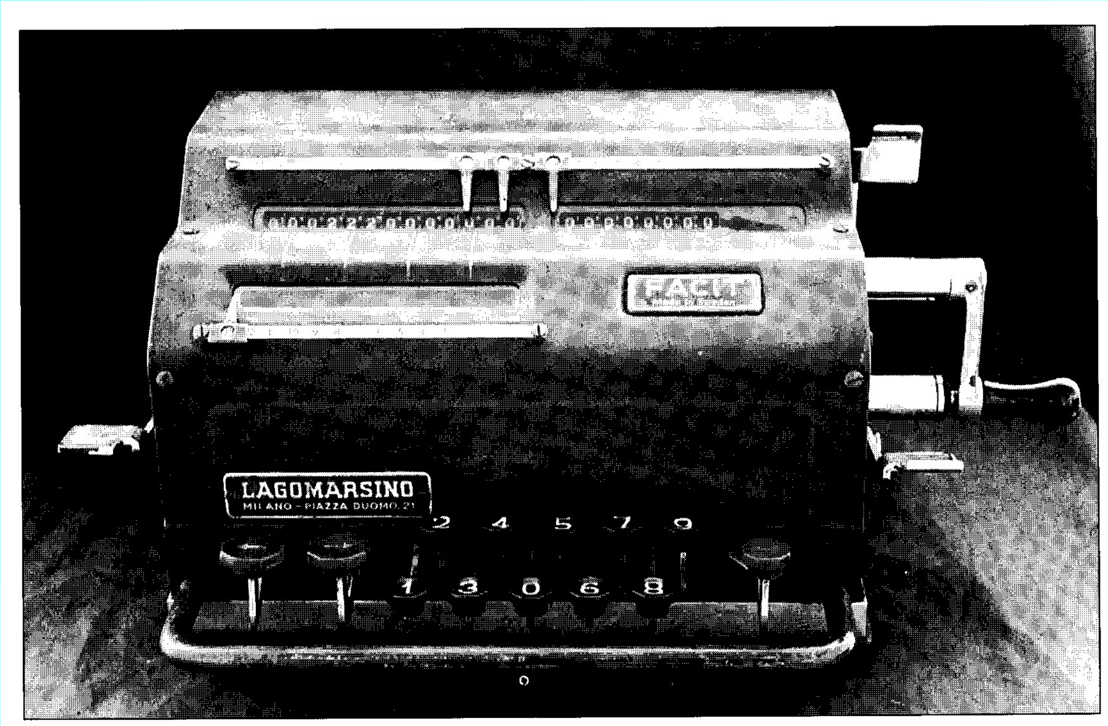


Geniale, tenendo anche conto che Pascal aveva 19 anni, ma rimasta solo allo stadio di prototipo.

L’avvento delle calcolatrici meccaniche

L’evoluzione progressiva delle calcolatrici meccaniche:

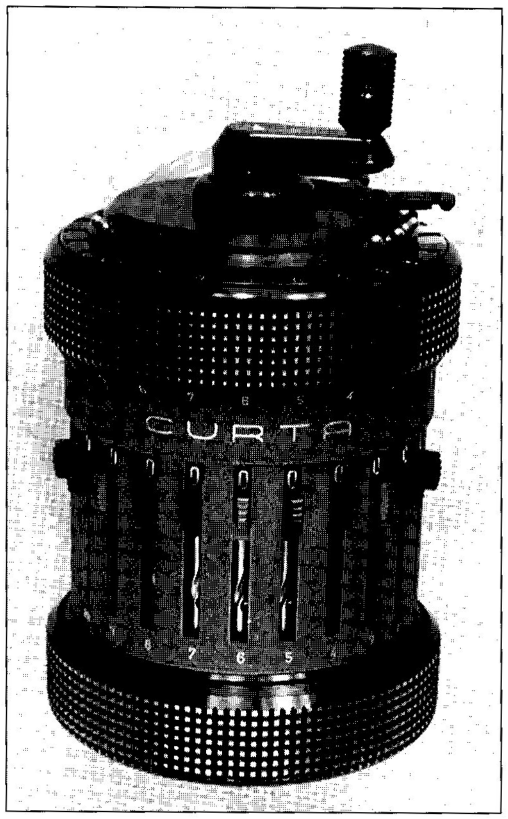
Altro modello di addizionatrice a tastiera prodotta dalla Facit di Milano.



L’avvento delle calcolatrici meccaniche

L’evoluzione progressiva delle calcolatrici meccaniche:

Il canto del cigno: fine anni 1960.
La CURTA, produzione di una ditta del Liechtenstein. Apparecchio di meccanica fine che permette di eseguire agevolmente le quattro operazioni aritmetiche.
Dura meno di 20 anni; scompare con l’avvento delle calcolatrici elettroniche.



Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Quarta rivoluzione: XVII secolo. **L'uso dei logaritmi**, grazie alla confezione di tavole logaritmiche.

La novità: si possono finalmente calcolare potenze a esponente razionale e quindi radici di qualsiasi indice. Notevole strumento per calcolare con numeri molto grandi e piccoli.

Vettore del cambiamento: l'idea di sostituire i numeri con i loro esponenti (logaritmi) secondo una base prefissata (10), letti direttamente su apposite tavole. **1614: John Napier** (Giovanni Nepero), scozzese, pubblica le prime tavole con i valori dei logaritmi in base 10. **1620: Jost Bürgi**, svizzero, pubblica le sue tavole, calcolate con un procedimento diverso da quello di Nepero.

Il calcolo con i logaritmi

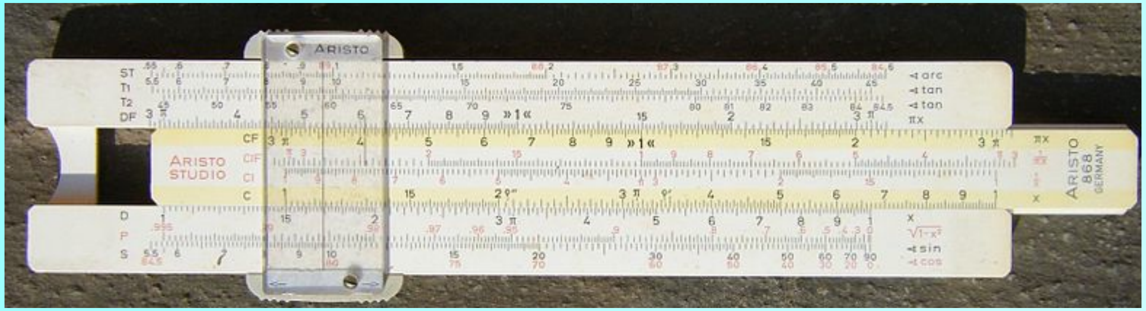
Come si svolse il cambiamento: il calcolo con i logaritmi rimase confinato nelle scuole superiori e professionali (disegnatori catastali, geometri) e negli atenei. Furono costruite anche tavole logaritmico-trigonometriche.
Nelle nostre scuole il calcolo logaritmico si è insegnato fin verso gli anni 1980.

Non si diffuse maggiormente per due ragioni:

- l'uso richiede la conoscenza della scrittura matematica;
- per i bisogni quotidiani sono più adatti gli algoritmi arabici;
- parallelamente nascono le prime calcolatrici meccaniche e conoscono un grande sviluppo.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

1905, il regolo calcolatore (applicazione dei logaritmi).
A.W. Faber Castell costruisce uno dei primi regoli calcolatori in legno di pero, lungo 280 mm. La scala inferiore porta i numeri da 1 a 10, quella superiore da 1 a 100.



Come si svolse il cambiamento: uso ristretto alle scuole e alle professioni tecniche e scientifiche. Con questo semplice strumento si può moltiplicare,dividere e, con un po' di abilità, persino estrarre la radice quadrata. Fino alla comparsa delle calcolatrici elettroniche, lo si trovava nel taschino di ogni ingegnere.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Quinta rivoluzione: Inizio anni 1980:
la calcolatrice elettronica.

Vettore del cambiamento: il progresso tecnologico dai transistor ai circuiti integrati, dal rame al silicio; la nascita dei microprocessori. L'elettronica a basso prezzo.

La novità: con questo mezzo tecnologico si possono eseguire praticamente tutti i calcoli desiderati, premendo opportunamente i tasti nella giusta sequenza. Inoltre queste calcolatrici hanno implementate le principali funzioni matematiche, per cui sostituiscono anche le tavole numeriche. Lo strumento è comodo e alla portata di tutti.

La comparsa della calcolatrice elettronica

Come si svolse il cambiamento: questa rivoluzione tocca l'intera popolazione; l'uomo della strada passa direttamente dal calcolo scritto (algoritmi arabici) all'uso della calcolatrice; l'accettazione avviene in modo differenziato.

Nelle scuole superiori il cambiamento è immediato e, senza alcuna opposizione (e non senza sollievo), si abolisce il calcolo logaritmico.

Le case editrici parano il colpo: per lo stesso prezzo, invece delle *Tavole logaritmiche e trigonometriche*, offrono i *Formulari di matematica e fisica*, che non contengono più tavole numeriche, ma formule.

La comparsa della calcolatrice elettronica

L'intero settore scolastico dell'obbligo si trova di fronte a un nuovo importante quanto difficile compito:

ripensare tutto l'insegnamento del calcolo numerico in modo da inserirvi opportunamente l'**uso della calcolatrice**.

Due considerazioni importanti.

- La calcolatrice parla il **linguaggio della matematica**; comprare una calcolatrice e leggere le istruzioni non permette necessariamente di essere in grado di usarla.
- Per usare bene una calcolatrice occorre essere in grado di **stimare il risultato** del calcolo che si intende eseguire.

Le grandi rivoluzioni del calcolo numerico

Sesta rivoluzione: anni 1980-90, la comparsa del *personal computer* e di *internet*.

Vettore del cambiamento: il computer entra praticamente in tutte le attività umane. Tecnologicamente diventa sempre più facile da usare, sempre più potente e il prezzo si abbassa continuamente; il computer entra nelle case e diventa un forte attrattore per i giovanissimi. Con internet, il mondo intero è a portata di mano: nasce l'era della comunicazione.

Novità per la scuola: il foglio elettronico e gli ambienti virtuali per l'insegnamento (geometria dinamica, Cabri-elem, ecc.) e la possibilità di accedere alle banche di dati del mondo intero.

Progetto per l'insegnamento del calcolo a scuola

Principi fondamentali:

1. Calcoli semplici e stima di risultati si eseguono usando la propria mente (calcolo ragionato mentale, schemi e scrittura matematica in riga).

2. Calcoli complicati e sequenze complesse di calcoli si fanno a macchina.

3. Il calcolo scritto (l'insieme degli algoritmi arabici o calcoli in colonna) non dovrebbe più far parte dei programmi, ma, se lo si vuole, può essere visto in un contesto storico.

Il calcolo ragionato al posto di quello mnemonico (o calcolo in colonna): un cambiamento che «s'ha da fare»

Un esempio svizzero: il canton Lucerna

Adeguamento dei programmi 2006: Cambiamento nel modo di calcolare

Cambiamento importante: a partire dall'anno scolastico 2007/08 dalla 3ª alla 6ª classe i procedimenti scritti del calcolo relativi a (addizione), sottrazione, moltiplicazione e divisione non fanno più parte degli argomenti da insegnare.

Le quattro (tre) operazioni aritmetiche devono essere introdotte ed esercitate seguendo il metodo del calcolo ragionato (halbschriftliches Rechenverfahren).

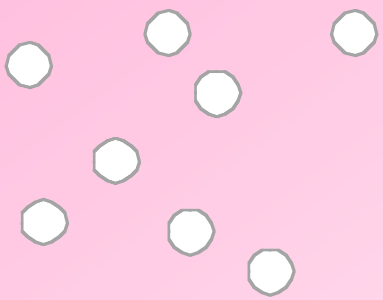
Il calcolo mentale e la scrittura matematica

L’addizione

Nel calcolo mentale, l’addizione è l'operazione basilare, dalla quale si sviluppano tutte le altre.

Essa è basata sull'atto del contare. Possiamo dire che contare significa addizionare e che addizionando si conta.

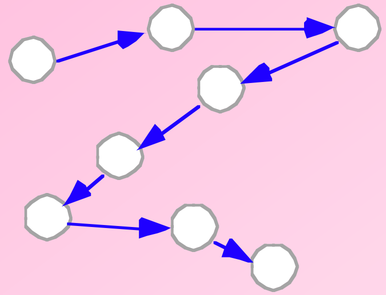
Dovendo contare le palline…



si può procedere …

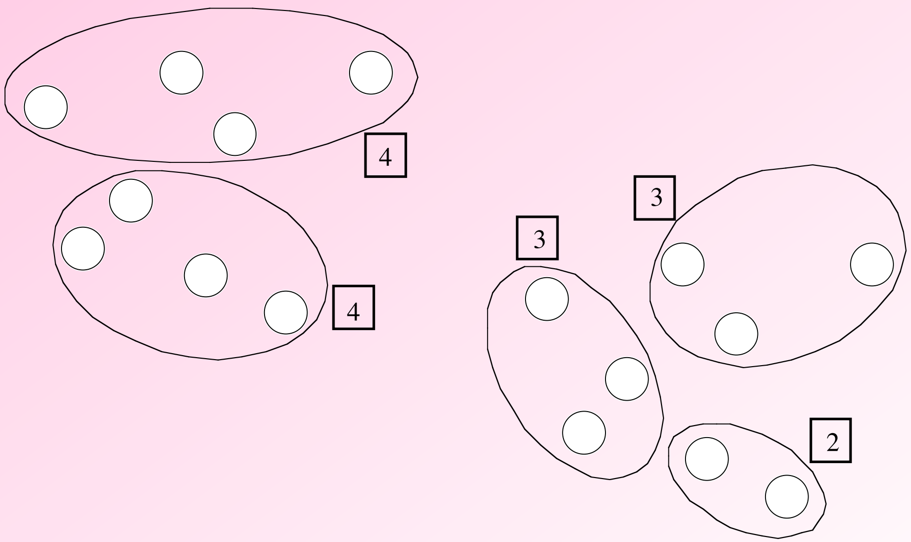
L' addizione

… contandole a una a una seguendo un percorso adatto, per esempio



enumerazione / conteggio

oppure operando una partizione comoda dell'insieme, per esempio:



L'addizione

La scomposizione additiva di un numero naturale (conseguenza del contare per partizione) è uno dei primi passi nell'apprendimento del sistema di numerazione e del calcolo mentale.

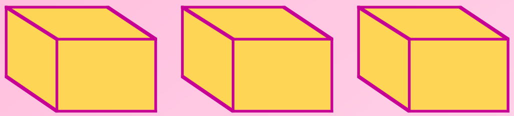
Esempio: quante sono le castagne del mucchio?

C'è chi si mette a contarle ad una ad una… ma ben presto desiste.

Nasce l’idea di suddividere le castagne in mucchietti di ugual numero (per esempio 2, 5, 6 ma ben presto 10).

Ogni mucchietto di 10 castagne viene messo in un sacchetto.

Ogni 10 sacchetti vengono messi in una scatola, così da ottenere, per esempio, questa situazione:

Scatole (h)	Sacchetti (da)	castagne singole (u)
 3	 5	//// 4

Sono state raccolte 354 (trecentocinquantaquattro) castagne

Situazioni di questo tipo racchiudono l’essenziale del sistema di numerazione.

L’addizione

La scomposizione additiva di un numero naturale (conseguenza del contare per partizione) è uno dei primi passi nell’apprendimento del calcolo mentale.

Esempio: per l'esecuzione di addizioni che comportano il passaggio della decina

7+8 = 7+(3+5) = (7+3)+5 = 10+5 = 15

17+38 = 10+30+(7+8) = 40+15 = 55

517+438 = 500+400+(17+38) = 900+55 = 955

Tutti e tre i casi si basano sulla proprietà associativa.

Questo modo di eseguire i calcoli lo chiamiamo calcolo in riga in contrapposizione al calcolo in colonna.

L'addizione:
da subito l'ampliamento ai multipli di 10, 100, …

Se so che…	Posso anche calcolare…
3 + 2 = 5	30 + 20, 300 + 200, …
7 + 6 = 13	70 + 60, 700 + 600, …

I bambini stessi ce lo chiedono, desiderano i numeri grandi.

Inoltre, quando si conosce la scomposizione in h / da / u, si possono eseguire calcoli del tipo

30 + 2, 3 + 20, 300 + 2, 300 + 20, …

3 da + 2 u, 3 u + 2 da, 3 h + 2 u, 3 h + 2 da, …

7 da + 6 da = 13 da = 1 h + 3 da = 130 …

7 h + 16 u = 7 h + 1 da + 6 u = 716 …

E ancora:

3 da + 2 u = 3 u + 2 da = 3 h + 2 u = , …

3 da + 2 da =, 3 h + 2 da + 4 h + 5 da = , …

Per poi giungere ad eseguire le «solite» addizioni:

372 + 526 = 300 + 70 + 2 + 500 + 20 + 6 = 800 + 90 + 8 = 898

E le più difficili:

375 + 548 = 300 + 500 + 70 + 40 + 5 + 8 = 800 + 110 + 13 =
= 800 + 100 +10 + 13 = 900 + 23 = 923

Anche con più di due addendi:

375 + 540 + 637 = 300 + 500 + 600 + 70 + 40 + 30 + 5 + 7 =
1’400 + 140 + 12 = 1’552

Solo la proprietà associativa consente di scrivere addizioni e moltiplicazioni di più di due termini.

Siccome, per esempio, $(5 + 6) + 7 = 5 + (6 + 7)$

si può scrivere $5 + 6 + 7$

intendendo una qualsiasi delle due interpretazioni possibili

Ciò vale anche per la moltiplicazione, per esempio
$(10 \times 6) \times 7 = 10 \times (6 \times 7) = 10 \times 6 \times 7$

Ma **non** vale né per la sottrazione né per la divisione, infatti:

$(50-23)-12 = 27-12 = 15$; $50-(23-12) = 50-11 = 39$

$(18 : 6) : 3 = 3 : 3 = 1$ $\quad$ $18 : (6 : 3) = 18 : 2 = 9$

L’addizione: le proprietà associativa e commutativa.

Abbiamo appena visto il ruolo centrale di queste proprietà nel calcolo di somme.

Tuttavia consigliamo gli insegnanti di non concettualizzarle separatamente e perciò di non introdurre i termini che le designano.

Basterebbe dire che ha senso scrivere addizioni con più di due addendi e che per calcolarne il risultato **si può iniziare dall’addendo desiderato e procedere nell’ordine più opportuno**.

L’addizione con numeri decimali

La scomposizione in unità (u), decine (da), centinaia (h) e migliaia (k) può`essere completata con decimi (d), centesimi (c) e millesimi (m).

Esempi

0,2 + 0,3 = 0,5	2 d + 3 d = 5 d
0,2 + 0,03 = 0,23	2 d + 3 c = 20 c + 3 c = 23 c
0,7 + 0,5 = 1,2	7 d + 5 d = 12 d = 1 u + 2 d
3,5 + 0,05 = 3,55	350 c + 5 c = 355 c = 3,55

I calcoli della colonna di destra sono meno usuali, ma presentano due vantaggi: si esercita bene la scomposizione decimale e si addizionano solo interi.

Le addizioni vincenti

7+8 si esegue più velocemente a mente, mentre 8617+9738 si esegue più speditamente con la calcolatrice. Ovviamente molto dipende dall'abilità dell'esecutore.

Gli allievi si devono rendere conto che, progredendo nell'esercizio del calcolo mentale, aumentano le possibilità di essere competitivi rispetto al calcolo automatico.

Devono però trovare la necessaria motivazione che li spinga a dedicarsi al calcolo mentale.

Perciò, specialmente all'inizio, occorre metterli di fronte a casi vincenti. Eccone alcuni:

Presenza di complementi alla decina o al centinaio

$4 + 17 + 6 + 13 = (4 + 6) + (17 + 13) = 10 + 30 = 40$

$39 + 78 + 11 = (39 + 11) + 70 + 8 = 50 + 70 + 8 = 120 + 8 = 128$

$120 + 345 + 280 + 55 = (120 + 280) + (345 + 55) =$
$= 400 + 400 = 800$

Tutti e tre i casi si basano sulle proprietà associativa e commutativa.

Con un po' di allenamento, con calcoli simili eseguiti in riga (o mentalmente) si riesce a battere in velocità chiunque operi con una calcolatrice.

Presenza di addendi ripetuti

$5 + 5 + 3 + 3 + 3 + 6 + 6 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 5 + 4 + 6 =$
$= 5 \times 3 + 3 \times 5 + 6 \times 3 + 4 \times 5 = 15 + 15 + 18 + 20 = 68$

$23 + 25 + 25 + 23 + 24 + 25 + 25 + 25 + 25 + 23 + 24 + 24 +$
$24 + 24 =$

$= 23 \times 3 + 25 \times 6 + 24 \times 5 = 69 + 150 + 100 = 69 + 250 = 319$

Con addendi “vicini”.

$607 + 606 + 605 + 606 =$

$= 600 \times 4 + 7 + 6 + 5 + 6 = 2400 + 24 = 2424$

$0{,}99 + 1{,}03 + 0{,}98 + 1{,}00 + 0{,}96 + 1{,}02 =$
$= 6 - 0{,}01 + 0{,}03 - 0{,}02 - 0{,}04 + 0{,}02 = 6 - 0{,}02 = 5{,}98$

Ovviamente più tecniche possono anche essere combinate in uno stesso calcolo: è solo questione di abilità e di allenamento.

Ogni allievo diventa padrone di una o più tecniche, a diversi livelli di abilità, e saprà usare i metodi più congeniali al proprio modo di pensare e di “vedere”.

La sottrazione

Sottrazione e addizione vanno a braccetto nell'apprendimento.

Affrontando addizioni di due addendi, per esempio

43 + 16 = ?

nasce ben presto la curiosità di spostare il punto interrogativo, cioè il termine sconosciuto:

43 + ? = 59

? + 16 = 59

Per l'allievo queste sono le prime equazioni. Le può risolvere per intuizione o facendo capo ad esempi concreti:

Ho 43 figurine; l'album completo ne conta 59; quante figurine mi mancano?

La sottrazione

Il passaggio da $43 + ? = 59$ a $? = 59 - 43$ è delicato.

Siamo in presenza di un cambiamento di registro semiotico: conversione dal registro additivo a quello sottrativo.

La scomposizione additiva vista per l'addizione è applicabile anche alla sottrazione.

Vi sono due tecniche fondamentali per eseguire mentalmente una sottrazione. Vediamo la prima:

$77 - 13 = (77 - 10) - 3 = 67 - 3 = 64$

$176 - 48 = (176 - 40) - 8 = 136 - 8 = (136 - 6) - 2 =$

$= 130 - 2 = 128$

La sottrazione “dal basso all’alto”

La seconda tecnica si basa sul fatto che se $S - m = d$, allora $m + d = S$, per cui l’esecuzione della sottrazione può anche essere fatta “contando” o “addizionando” da m fino a S.

Può anche essere applicata mediante un percorso a frecce.

Per calcolare 73 – 17 si può procedere così:

$$17 \xrightarrow{+3} 20 \xrightarrow{+50} 70 \xrightarrow{+3} 73$$

$73 - 17 = 3 + 50 + 3 = 56$

Come dire: la sottrazione trasformata in addizione.

La moltiplicazione

La moltiplicazione può essere vista come un’addizione con gli addendi uguali fra loro. Per esempio

$3 \times 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21 = 7 \text{ x } 3$

L’additività può essere sfruttata anche parzialmente.

Per esempio:

Se so che
$7 \times 2 = 14$
Posso dedurre che
$7 \times 3 = 14 + 7 = 21$

Se so che
$7 \times 10 = 70$
Posso dedurre che
$7 \times 9 = 70 - 7 = 63$

In questo modo si possono costruire tutti i prodotti entro il 100 (le cosiddette tabelline) che vanno poi memorizzate.

La moltiplicazione

Oltre alle tabelline, vale la pena di calcolare ed eventualmente memorizzare qualche quadrato oltre il 100. Per esempio:

$11 \times 11 = 11 \times 10 + 11 = 110 + 11 = 121$

$12 \times 12 = 12 \times 10 + 12 \times 2 = 120 + 24 = 144$

$15 \times 15 = 15 \times 10 + 15 \times 5 = 150 + 75 = 225$

$20 \times 20 = 400$; 30×30, ecc.

$25 \times 25 = 25 \times 20 + 25 \times 5 = 500 + 125 = 625$

$19 \times 19 = 19 \times 20 - 19 = 190 \times 2 - 19 = 380 - 19 = 361$

Combinare moltiplicazione con addizione e sottrazione è un gioco divertente e proficuo.

La moltiplicazione: da subito

Se si conoscono le tabelline, e se si sa che

$10 \times 10 = 100$, $10 \times 100 = 1000$, $100 \times 100 = 10'000$, …

u x u = u, u x da = da, da × da = h, da × h = k

si possono eseguire a mente anche calcoli del tipo:

40×7, 4×70, 40×70, 400×70, 40×700, …

4 da × 7 u, 4 u × 7 da, 4 da × 7 da, 4 h × 7 da,

4 da x 7 h = 4 da x 70 da = 280 h = 28 k = 28'000 , …

11 × 110 = 11 u x 11 da = 121 da = 1'210, 110 × 110, …

La soddisfazione dell'allievo non è poca!

Calcolo di prodotti oltre il 100: la proprietà distributiva

A differenza delle proprietà associativa e commutativa (che sono insite in ogni ripartizione di oggetti), la distributiva è una proprietà **non intuitiva**, ma è anch'essa **basilare** nel calcolo (sia numerico sia letterale)

Vale la pena impararla bene e il più presto possibile.

In particolare la proprietà distributiva permette di estendere la capacità di calcolare prodotti oltre il 100. Per esempio:

$17 \times 4 = (10 + 7) \times 4 = 10 \times 4 + 7 \times 4 = 40 + 28 = 68$

$26 \times 8 = (20 + 6) \times 8 = 20 \times 8 + 6 \times 8 = 160 + 48 = 208$

$42 \times 14 = 42 \times (10 + 4) = 42 \times 10 + 42 \times 4 = 420 + 168 =$

$= 420 + 160 + 8 = 580 + 8 = 588$

Calcolo di prodotti oltre il 100: la proprietà distributiva

Oppure:

$42 \times 14 = (40 + 2) \times 14 = 40 \times 14 + 2 \times 14 = 560 +28 = 588$

$53 \times 36 = 53 \times (30 + 6) = 53 \times 30 + 53 \times 6 = 1590 + 318 =$

$= 1590 + 310 + 8 = 1908$

$45 \times 19 = 45 \times (20 - 1) = 45 \times 20 - 45 \times 1 = 900 - 45 = 855$

$73 \times 29 = 73 \times (30 - 1) = 2190 - 73 = 2117$

Si potrebbe anche operare con la doppia distributiva:

$42 \times 14 = (40 + 2) \times (10 + 4) = 40 \times 10 + 40 \times 4 +$

$+ 2 \times 10 + 2 \times 4 = 400 + 160 + 20 + 8 = 588$

se si vuole…

Oppure:

$42 \times 14 = ?$

	40	2
10	400	20
4	160	8

$42 \times 14 = 400 + 160 + 20 + 8 = 588$

Più difficile:

$347 \times 67 = ?$

	300	40	7
60	18'000	2'400	420
7	2'100	280	49

$347 \times 67 = 18'000 + 2'400 + 2'100 + 280 + 420 + 49 =$

$= 18'000 + 4'500 + 700 + 49 = 22'500 + 700 + 49 = 23'249$

Oppure ancora, schematicamente:

$$136 \times 3 = ?$$

$$100 + 30 + 6$$

$$100 \xrightarrow{\times 3} 300 \qquad 30 \xrightarrow{\times 3} 90 \qquad 6 \xrightarrow{\times 3} 18$$

$$300 + 90 + 18 = 408$$

$$29 \times 37 = ?$$

$$20 + 9 \qquad 30 + 7$$

$$20 \xrightarrow{\times 30} 600 \qquad 20 \xrightarrow{\times 7} 140 \qquad 9 \xrightarrow{\times 30} 270 \qquad 9 \xrightarrow{\times 7} 63$$

$$600 + 140 + 270 + 63 =$$

$$= 900 + 40 + 70 + 63 =$$

$$= 900 + 103 + 70 = 1073$$

Oppure ancora, se si preferisce:

$$29 \times 37 = ?$$

$$30 - 1 \qquad 30 + 7$$

$$\times 30 \quad \times 7 \quad \times 30 \quad \times 7$$

$$900 + 210 - (30 + 7) =$$

$$= 1110 - 30 - 7 =$$

$$= 1080 - 7 = 1073$$

Pray (Biella), 2012-2013

MOLTIPLICAZIONI

$513 \times 5 =$

① $513 \times 5 = 2565$

$500 + 10 + 3$

$\downarrow \times 5 \quad \downarrow \times 5 \quad \downarrow \times 5$

$2500 + 50 + 15 = 2565$

②

X	500	10	3
5	2500	50	15

$2500 + 50 + 15 = 2565$

③ $513 \times 5 = (500 + 10 + 3) \times 5 =$

$= (500 \times 5) + (10 \times 5) + (3 \times 5) = 2500 + 50 + 15 = 2565$

Pray (Biella), 2012-2013

$172 \times 25 =$

①

×	100	70	2
20	2'000	1'400	40
5	500	350	10

$2'000 + 1400 + 40 + 500 + 350 + 10 = 4'300$

3'900

$2'000 + 1'400 + 40 + 500 + 350 + 10 = 4300$

50 400

$3'900 + 400 = 4300$

②

$172 \times 25 = (100 + 70 + 2) \times (20 + 5) =$

$= (100 \times 20) + (70 \times 20) + (2 \times 20) + (100 \times 5) + (70 \times 5) + (2 \times 5) =$

$= 2'000 + 1'400 + 40 + 500 + 350 + 10 = 4300$

Presenza di complementi alla decina, al centinaio o al migliaio

È molto utile conoscere i prodotti di fattori naturali che danno una potenza di 10:

$2 \times 5 = 10$

$2 \times 50 = 4 \times 25 = 100$

$2 \times 500 = 4 \times 250 = 8 \times 125 = 1000$

Presenza di complementi alla decina, al centinaio o al migliaio: uso delle proprietà associativa e commutativa.

Ed ecco alcuni esempi di calcolo:

$17 \times 2 \times 5 = 17 \times (2 \times 5) = 17 \times 10 = 170$

$4 \times 38 \times 25 = (4 \times 25) \times 38 = 3800$

$50 \times 223 \times 6 = (50 \times 2) \times (223 \times 3) = 100 \times 669 = 66900$

$8 \times 189 \times 125 = (8 \times 125) \times 189 = 1000 \times 189 = 189000$

$16 \times 96 \times 25 = 4 \times (4 \times 25) \times 96 = (4 \times 96) \times 100 = 38400$

Calcolo di prodotti non interi

Il calcolo mentale nasce e si sviluppa con i numeri interi, ma si può estendere facilmente anche ai casi in cui non tutti i fattori sono interi. Per esempio:

se $17 \times 4 = 68$ allora $1{,}7 \times 4 = 6{,}8$ $1{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}68$

In particolare: d × u = d , d × d = c , c x u = c , d x c = m

quindi: 1,7 × 0,4 = 17 d x 4 d = 68 c = 0,68

0,53 × 36 = 53 c x 36 u = 1908 c = 19,08

5,3 × 0,36 = 53 d x 36 c = 1908 m = 1,908

La divisione in N

Con il divisore di una sola cifra

a) entro il 100

Da $42 = 6 \times 7$ seguono $\begin{cases} 42 : 6 = 7 \\ 42 : 7 = 6 \end{cases}$

Per eseguirle occorre conoscere i prodotti in N entro il 100.

b) oltre il 100

$112 : 8 = (80 + 32) : 8 = 80 : 8 + 32 : 8 = 10 + 4 = 14$

Si usa la proprietà distributività della divisione. Ma la difficoltà maggiore consiste nell'eseguire opportunamente la scomposizione additiva del dividendo. Se il divisore è d, conviene dapprima stimare il più grande numero 10 d minore del dividendo.

La divisione in N

Con il divisore di una sola cifra

301 : 7 = (280 + 21) : 7 = 280 : 7 + 21 : 7 = 40 + 3 = 43

819 : 9 = (810 + 9) : 9 = 810 : 9 + 9 : 9 = 90 + 1 = 91

Dividere per 2, 4, 8, 16,…

448 : 2 = 224

448 : 4 = (448 : 2) : 2 = 224 : 2 = 112

448 : 8 = [(448 : 2) : 2] : 2 = [224 : 2] : 2 = 112 : 2 = 56

448 : 16 = (((448 : 2) : 2) : 2) : 2 = ((224 : 2) : 2) : 2 =
= (112 : 2) : 2 = 56 : 2 = 28

La divisione in N

Con il divisore di due cifre

a) Dividere per $d = a \cdot b$

$$390 : 15 = (390 : 5) : 3 = [(350 + 40) : 5] : 3 =$$
$$= [350 : 5 + 40 : 5] : 3 = 78 : 3 = (60 + 18) : 3 = 26$$

$$612 : 18 = (612 : 2) : 9 = 306 : 9 = (270 + 36) : 9 =$$
$$= 270 : 9 + 36 : 9 = 34$$

La divisione in N

b) Con il metodo "delle sottrazioni successive"

$845 : 65 = ?$

$$845 \xrightarrow{-65 \times \mathbf{10}} 195 \xrightarrow{-65 \times \mathbf{2}} 65 \xrightarrow{-65 \times \mathbf{1}} 0$$

$845 : 65 = 10 + 2 + 1 = 13$

$2632 : 56 = ?$

$$2632 \xrightarrow{-56 \times \mathbf{20}} 1512 \xrightarrow{-56 \times \mathbf{20}} 392 \xrightarrow{-56 \times \mathbf{5}} 112 \xrightarrow{-56 \times \mathbf{2}} 0$$

$2632 : 56 = 20 + 20 + 5 + 2 = 47$

La divisione in N

c) Con il metodo additivo, “dal basso all’alto”

845 : 65 = ? Cioè: quante volte il 65 sta in 845?

$$\xrightarrow{65 \times \mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+\ 65 \times \mathbf{3}} 845$$

845 : 65 = 10 + 3 = 13

2632 : 56 = ?

$$\xrightarrow{56 \times \mathbf{20}} 1120 \xrightarrow{+\ 56 \times \mathbf{20}} 2240 \xrightarrow{+\ 56 \times \mathbf{5}} 2520 \xrightarrow{+\ 56 \times \mathbf{2}} 2632$$

2632 : 56 = 20 + 20 + 5 + 2 = 47

Come dire: una divisione trasformata in un’addizione

La divisione in N

c) Divisione con resto (metodo additivo)

$823 : 9 = (810 + 13) : 9 = 810 : 9 + 13 : 9 = 90 + (9 + 4): 9 =$
$= 90 + 9 : 9 + 4 : 9 = 91 + 4 : 9$ (oppure 91 con resto 4; 91 R4)

$871 : 65 = ?$

$\xrightarrow{65 \times \mathbf{10}} 650 \xrightarrow{+\ 65 \times \mathbf{3}} 845$

$871 - 845 = 26 < 65$

$871 : 65 = 10 + 3 + 26 : 65 = 13 + 26 : 65$

oppure = 13 con resto 26 (13 R26)

La divisione in Q e la proprietà invariantiva

a) Moltiplicando per una potenza di 10, come d'abitudine

$45 : 1,5 = 450 : 15 = (450 : 5) : 3 = 90 : 3 = 30$

b) Moltiplicando per fattori diversi

$45 : 1,5 = (45 \times 2) : (1,5 \times 2) = 90 : 3 = 30$

$32 : 0,4 = (32 \times 5) : (0,4 \times 5) = 160 : 2 = 80$

$4,5 : 0,25 = (4,5 \times 4) : (0,25 \times 4) = (18 : 1) = 18$

$36 : 1,125 = (36 \times 8) : (1,125 \times 8) = (288 : 9) = (270 + 18) : 9 =$
$= 30 + 2 = 32$

La divisione in Q con risultato non intero

Esempio: calcoliamo il quoziente di 3254 : 78

Unità $\xrightarrow{78 \times 40} 3120 \xrightarrow{+\, 78 \times 1} 3198$ **41**

Resto: 3254 – 3198 = 56 u = **560 d**

Decimi $\xrightarrow{78 \times 5} 390 \xrightarrow{+\, 78 \times 2} 546$ **7**

Resto: 560 d – 546 d = 14 d **= 140 c**

Centesimi $\xrightarrow{78 \times 1} 78$ **1**

3254 : 78 = 41,71 con resto 62 centesimi

Composizioni di moltiplicazioni

$$\xrightarrow{\text{X 2}} \quad \xrightarrow{\text{X 2}} \quad = \quad \xrightarrow{\text{X 4}}$$

$$\xrightarrow{\text{X 2}} \quad \xrightarrow{\text{X 3}} \quad = \quad \xrightarrow{\text{X 6}}$$

$$\xrightarrow{\text{X 3}} \quad \xrightarrow{\text{X 3}} \quad = \quad \xrightarrow{\text{X 9}}$$

$$\xrightarrow{\text{X 3}} \quad \xrightarrow{\text{X 5}} \quad = \quad \xrightarrow{\text{X 15}}$$

$$\xrightarrow{\text{X 3}} \quad \xrightarrow{\text{X 4}} \quad = \quad \xrightarrow{\text{X 12}}$$

Ecc.

Composizioni di divisioni

$$\xrightarrow{:2} \xrightarrow{:2} \quad = \quad \xrightarrow{:4}$$

$$\xrightarrow{:2} \xrightarrow{:3} \quad = \quad \xrightarrow{:6}$$

$$\xrightarrow{:3} \xrightarrow{:3} \quad = \quad \xrightarrow{:9}$$

$$\xrightarrow{:3} \xrightarrow{:5} \quad = \quad \xrightarrow{:15}$$

$$\xrightarrow{:3} \xrightarrow{:4} \quad = \quad \xrightarrow{:12}$$

Ecc.

Composizioni miste

$\xrightarrow{x\ 2} \xrightarrow{:\ 2} = \xrightarrow{x\ 1}$

$\xrightarrow{x\ 4} \xrightarrow{:\ 2} = \xrightarrow{x\ 2}$

$\xrightarrow{x\ 2} \xrightarrow{:\ 4} = \xrightarrow{:\ 2}$

$\xrightarrow{x\ 6} \xrightarrow{:\ 2} = \xrightarrow{x\ 3}$

$\xrightarrow{:\ 6} \xrightarrow{x\ 2} = \xrightarrow{:\ 3}$

Ecc.

continua…

Indirizzi utili:

gianfranco.arrigo@span.ch

www.dm.unibo.it/rsddm